۲

چگونگی دستیابی به راه‌حل یک مسأله

ورزیده شدن در حل مسأله‌ها تنها به این دلیل نیست که سیاهه‌ای از روشهای گوناگون حل مسأله‌ها را در دسترس داشته باشید. برای حل مسأله‌ای که با آن روبه‌رو شده‌اید، نمی‌شود سرسری انگشت روی یکی از روشها بگذارید و آن را به‌کار ببرید، و اگر آن نشد یکی دیگر را، و اگر این هم نشد یکی دیگر را. دستیابی به راه حل مناسب راهی دارد که برای پیمودن آن، هم توشهٔ راه را باید فراهم آورده باشید و هم بدانید چه گذرگاههایی را باید پشت‌سر بگذارید. توشهٔ راه، درسهایی است که آنها را آموخته‌اید و باید آنها را خوب به‌خاطر داشته باشید و پس از آن، باید بدانید از کجا آغاز کنید و چه ترتیبی را برای گذشتن از گذرگاهها به‌کار ببرید تا به بیراهه نروید.

۲ـ۱ رهنمودها

۲ـ۱ـ۱ رسم شکل دقیق و گویا

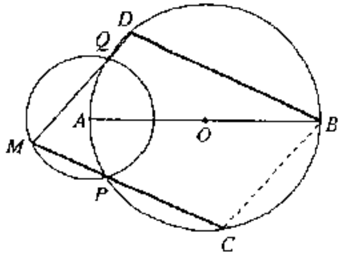
صورت مسأله را به‌دقت بخوانید و شکل مربوط به آن را جزء به‌جزء رسم کنید. این شکل باید هم دقیق و هم واضح باشد و اگر به‌جای دست، آن را با خط‌کش و پرگار و با ابزارهای دیگر رسم بکنید، خیلی بهتر به شما کمک خواهد کرد. چنانچه زمینهٔ مسأله مثلثی متساوی‌الساقین است، مثلثی را رسم کنید که دو ضلع آن واقعاً با هم برابر باشند و زاویهٔ رأس آن و قاعده‌اش نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ باشند به‌گونه‌ای که اگر بنا باشد داخل آن خطها یا دایره‌ای رسم کنید، به مشکل برنخورید و شکل در هم ریخته نشود. اگر در صورت مسأله از دو خط عمود بر هم گفتگو شده است، پس از رسم یکی از آنها، دیگری را با گونیا رسم کنید.

هر شکل را در حالت کلی رسم کنید نه در حالت ویژه. مثلاً اگر فرض مسأله یک مثلث است،

مثلثی رسم کنید که قائم‌الزاویه یا متساوی‌الساقین نباشد. شکلی که دقیق رسم شود و جزءهای آن و وضع آنها نسبت به هم آشکارا نموده شده باشند، راهنمایی خواهد بود برای پی بردن به استدلالی که باید انجام گیرد و معلوم خواهد کرد برای هر جزء آن چه چیز را می‌توان و باید ثابت کرد.

مثال ۱. دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB با دایرهٔ به مرکز A در P و Q برخورد کرده است، M نقطه‌ای دلخواه واقع بر دایرهٔ A است و خطهای MP و MQ به ترتیب در C و D با دایرهٔ O برخورد کرده‌اند. ثابت کنید پاره‌خطهای MC و BD با هم برابرند.

دایرهٔ به مرکز O را بزرگتر و دایرهٔ به مرکز A را کوچکتر و دو پاره‌خط MC و BD را سیاهتر از خطهای دیگر رسم می‌کنیم. با نگاه به شکل، دو خط MC و BD موازی با هم دیده می‌شوند. از اینجا راهنمایی می‌شویم که باید ثابت کنیم چهارضلعی $MCBD$ متوازی‌الاضلاع است.



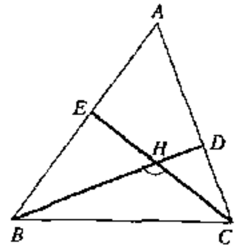
شکل۲-۱

* یادداشت. شکل مسأله نه تنها باید دقیق و واضح باشد، بلکه لازم است همهٔ حالتهای ممکن را نیز رسم کرد وگرنه ممکن است گمراه کننده باشد. چنین امکانی به‌ویژه در حالتهایی می‌تواند پیش آید که به‌جای اثبات یک وضعیت، خواسته شده باشد نوع آن وضعیت نیز معلوم شود؛ مثلاً بنا باشد در یک پرسش چند گزینه‌ای پاسخ درست را اعلام کرد.

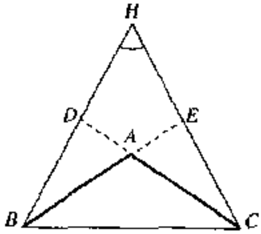
***مثال ۲.** در مثلث ABC، دو ارتفاع BD و CE در H برخورد می‌کنند. زاویهٔ BHC چه نوع زاویه‌ای است؟

در این مسأله اگر تنها مثلثی را رسم کنید که در آن زاویهٔ A حاده باشد، از روی شکل به پاسخ نادرست راهنمایی می‌شوید. زیرا در این حالت به‌نظر می‌رسد که زاویهٔ BHC حتماً منفرجه است. اما اگر حالتهای حاده و قائمه بودن زاویهٔ A را نیز در نظر بگیرید و شکلهای مربوط به آنها را نیز رسم کنید، پی می‌برید که اگر زاویهٔ A منفرجه باشد زاویهٔ H حاده است و اگر زاویهٔ A قائمه باشد نقطه‌های D، E و H روی A می‌افتند و زاویهٔ H قائمه است.

در چنین مسأله‌هایی بهتر است که رابطهٔ (نسبی یا اندازه‌ای) بین آن جزء که نوع آن خواسته شده است



شکل۲-۲



شکل۲-۳

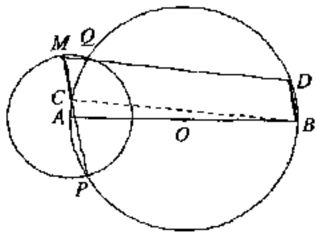
با یک جزء معلوم از شکل به‌دست آید.

در مثالی که یاد شد، به‌دست می‌آوریم

$$\angle H = ۱۸۰^\circ - \angle A$$

دو زاویهٔ A و H مکمل یکدیگرند و نوع زاویهٔ H به نوع زاویهٔ A بستگی دارد.

در مثال ۱ شکل به هرگونه که رسم شود، چه مطابق با شکل قبلی و چه مطابق با شکل زیر، و چه در حالتی که M داخل دایرهٔ O باشد، در هر حال حکم مسأله پابرجا می‌ماند.



شکل۲-۴

۲ـ۱ـ۲ شناسایی فرض و حکم

صورت مسأله را به‌دقت و با حواس جمع بخوانید تا به‌خوبی دریابید چه چیزهایی پذیرفته شده‌اند و چه چیز یا چیزهایی باید به‌دست آید. آن چیزهایی که پذیرفته شده‌اند، فرض مسأله‌اند و آنچه باید به‌دست آید، حکم مسأله است. فرض و حکم که شناخته شدند، اگر آنها را به گونه‌ای نمایان و جدا از هم بنویسید به شما کمک می‌کند تا بفهمید آنها دربارهٔ چه ویژگیهایی از شکل‌اند؛ ویژگیهای ناب هندسی یا ویژگیهای اندازه‌ای، آیا باید محاسبه‌ای را انجام دهید یا اینکه یک مکان هندسی را به‌دست آورید.

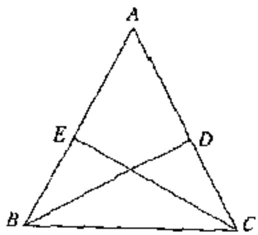
برای نمایان ساختن فرض و حکم روشهایی گوناگون را می‌توان به‌کار برد. یک روش آن است که در صورت مسأله، زیر هر جزء از فرض یک خط و زیر حکم دو خط بکشید. روشی که بیشتر به‌کار می‌رود، نوشتن هر جزء از فرض و حکم به‌صورت یک رابطهٔ جبری و قرار دادن هرگروه از رابطه‌های

فرض و حکم داخل یک ابرو و نوشتن واژه‌های فرض و حکم جلوی این ابروهاست.

مثال. در مسألهٔ «ثابت کنید که در مثلث متساوی‌الساقین دو ارتفاع وارد بر ساقها با هم برابرند»، فرض از سه جزء تشکیل می‌شود: یک مثلث ABC داریم، دو ضلع آن مثلاً AB و AC با هم برابرند. BD یک ارتفاع و CE یک ارتفاع مثلث است، و حکم این است که باید ثابت کنیم BD و CE با هم برابرند. شکل را رسم می‌کنیم و فرض و حکم را چنین می‌نویسیم:

فرض : مثلث ABC، $AB = AC$، $\angle D = ۹۰^\circ$ و $\angle E = ۹۰^\circ$؛

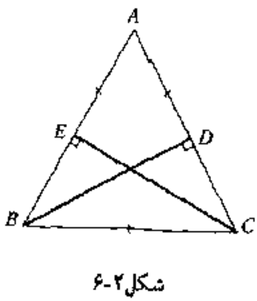
حکم : $BD = CE$.



شکل۲-۵

۲ـ۱ـ۳ نمایش فرض و حکم روی شکل

پس از آنکه شکل را رسم کردید و فرض و حکم را یافته و به‌گونه‌ای که گفته شد نوشتید، اگر فرض و حکم را با نشانه‌هایی روی شکل نشان دهید، کمک می‌کند تا زودتر و ساده‌تر به راه حل دست یابید. برای نمایش فرض و حکم روی شکل، معمولاً پاره‌خطهای برابر را با گذاشتن یک یا چند پاره‌خط ریز روی آنها، زاویه‌های برابر را با گذاشتن یک یا چند کمان ریز در فرجهٔ آنها، و زاویه‌های قائمه را با گذاشتن مربعی ریز در فرجهٔ آنها نشان می‌کنند. حکم مسأله را هم می‌شود با سیاهتر یا پررنگتر کردن جزءهای مربوط به آن روی شکل نمایان ساخت. با این روش، شکل (۲-۵) مربوط به مثال پیش، به‌صورت شکل (۲-۶) خواهد بود.



شکل۲-۶

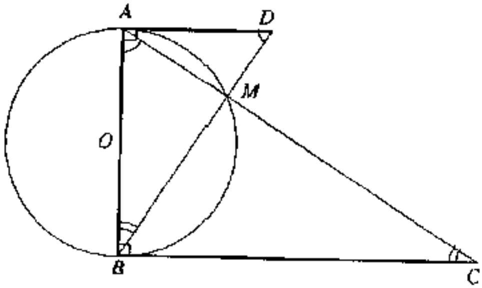
مثال. دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB و نقطهٔ دلخواه M روی آن داده شده است. خطهای AM و BM با مماسهایی که در A و B بر دایره رسم شوند در C و D برخورد می‌کنند. ثابت کنید:

$$AD \cdot BC = \overline{AB}^{۲}$$

فرض و حکم عبارت‌اند از:

$$\text{فرض}: \begin{cases} AB \text{ قطر دایره، } M \text{ روی دایره است،} \\ \angle BAD = ۹۰^{\circ}\text{،} \\ \angle ABC = ۹۰^{\circ}\text{،} \end{cases}$$

$$\text{حکم}: \quad AD \cdot BC = \overline{AB}^{۲}$$



شکل۲-۷

اگر رابطهٔ حکم را به‌صورت یک تناسب بنویسید، راهنمایی می‌شوید که باید ثابت کنید دو مثلث ABC و ABD متشابه‌اند و از این‌رو زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متناسب را که باید برابر بودنشان ثابت شود، روی شکل نشان می‌کنید و شکل (۲-۷) بالا را خواهید داشت.

۲ـ۲ راهکارها

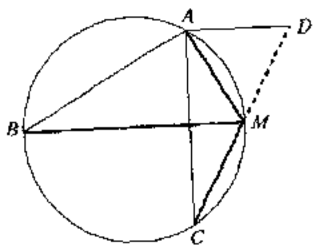
۲ـ۲ـ۱ دستکاری شکل

در برخی از مسأله‌ها، شکلی را که بنابر صورت مسأله رسم کرده‌اید ناکافی می‌بینید و از آن نمی‌توانید جواب را به‌دست آورید مگر آنکه آن را دستکاری کنید: باید خط یا خطهای جدیدی را به آن بیفزایید تا به کمک آنها بتوانید ویژگیها یا رابطه‌هایی را که در صورت مسأله بیان شده‌اند، در شکل بنمایانید. برای مثال اگر در صورت مسأله از مجموع دو ضلع از شکل سخن رفته است، یکی از آنها را به اندازهٔ دیگری امتداد دهید تا پاره‌خطی برابر با مجموع آنها را روی شکل داشته باشید. یا مثلاً اگر رابطه‌ای بین ضلعهای شکل خواسته شده است، ضلعهای تازه‌ای را چنان رسم کنید تا شکل رسم شده به شکلهایی تجزیه شود که رابطه‌های بین ضلعهای آنها را می‌شناسید. به هر حال، خطهای تازه‌ای که به شکل افزوده

می‌شوند باید جزءهای موجود در شکل را به یکدیگر نزدیکتر کنند و کار را پیش ببرند نه اینکه شکل را درهم ریخته کنند و لنگ ماندن کار را در پی داشته باشند.

مثال ۱. سه نقطهٔ A و B و C دایره‌ای را به سه کمان برابر تقسیم کرده‌اند و M نقطه‌ای دلخواه از کمان AC است. ثابت کنید وتر MB با مجموع وترهای MA و MC برابر است.

اگر دایره و وترهای MA، MB و MC را رسم کنید، رابطه‌ای را بین آنها نمی‌بینید. اما اگر CM را تا نقطهٔ D امتداد دهید که MD برابر با MA باشد، آنگاه پاره‌خط CD برابر با مجموع وترهای MA و MC را روی شکل خواهید داشت. برای آنکه برابری CD با BM را ثابت کنید، باید مثلث یا مثلثهایی به این ضلعها را داشته باشید. برای این‌کار، خطهای AB، AC و AD را نیز به شکل می‌افزایید. اکنون آنچه را باید ثابت کنید، برابری دو مثلث ABM و ACD است.

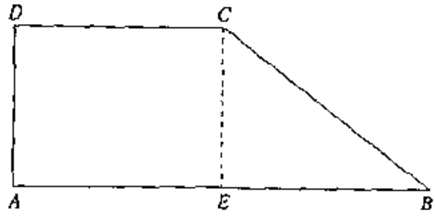


شکل ۲-۸

مثال ۲. در ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعدهٔ بزرگتر $AB = ۸۰$، قاعدهٔ کوچکتر $CD = ۴۰$، ساقها عبارت‌اند از $BC = ۵۰$ و $DA = ۳۰$. ثابت کنید زاویه‌های A و D از ذوزنقه قائمه‌اند.

یکا (= واحد) را میلیمتر می‌گیرید و شکل را با دقت رسم می‌کنید اما می‌بینید که کمکی به شما نمی‌کند مگر اینکه می‌دانید و می‌بینید که CD با AB موازی است. پس به این فکر می‌افتید که یک متوازی‌الاضلاع بسازید. برای این‌کار، خط CE موازی با AD را به شکل می‌افزایید و نتیجه می‌گیرید $BC = ۵۰$، $CE = ۳۰$ و $BE = ۴۰$. اگر زاویهٔ A قائمه باشد، زاویهٔ E هم باید قائمه و رابطهٔ فیثاغورس باید در مثلث BCE برقرار باشد، بنابراین درمی‌یابید که:

$$۵۰^۲ = ۴۰^۲ + ۳۰^۲ \Longrightarrow \overline{BC}^۲ = \overline{BE}^۲ + \overline{EC}^۲$$



شکل ۲-۹